Algorithmique Programmation Objet

Python

Andrea G. B. Tettamanzi

Université de Nice Sophia Antipolis

Département Informatique

andrea.tettamanzi@unice.fr

CM - Séance 8

Algorithmes de tri

Plan

- Avertissement
- Tri par comptage
- Tri par base
- Tri par insertion (déjà vu)
- Tri fusion
- Tri par sélection
- Tri par tas

Avertissement

Ce qui était vrai dans les années 70 ou 80 ne l'est plus maintenant, car

- On a beaucoup plus de mémoire
- On a intérêt à être localisés en mémoire

Tri par comptage

- Quand on a des nombres de 1 à p on peut les trier facilement en comptant le nombre d'occurrence de chaque nombre.
  - On crée un tableau de p valeurs
  - On met toutes ces valeurs à 0
  - On traverse T. On compte le nombre de fois ou T[i] est pris = on incrémente P[T[i]]
  - Ensuite on balaie le tableau P et on copie autant de fois une valeur qu'elle apparaît dans P

Tri par comptage

```
Booleen tri(T[],n)
min ← T[1]; max ← T[1]
pour i de 1 à n
  si T[i] < min: min ← T[i]
  si T[i] > max: max ← T[i]
pour k de 1 à (max – min + 1)
  P[k] ← 0
pour i de 1 à n
  P[T[i] – min + 1] ← P[T[i] – min + 1] + 1
i ← 1
pour k de 1 à (max – min + 1)
  pour j de 1 à P[k]
    T[i] ← k + min - 1
    i ← i + 1
```

Tri par comptage

- La complexité de ce tri est de O(n + p)
- Si p est de l'ordre de n alors le tri est linéaire, mais si p >> n ?
  - Si n = 100 et p = 10 000 : c'est quadratique!
  - Si n = 100 et p = 1 000 000 : c'est cubique !

Tri par base

- Le tri par base (ou tri radix ou radix sort) est un algorithme de tri rapide qui suppose que les éléments à trier sont des nombres ou des chaînes de caractères
- Cet algorithme était utilisé pour trier des cartes perforées en plusieurs passages.
- On veut trier des cartes à jouer :
  - On fait 4 tas : un pour les ♥, un pour les ♦, un pour les ♣ et un pour les ♠
  - Puis on trie les cartes de chaque couleur par un tri par comptage
- On veut trier des noms de famille
  - Des idées ?

Tri par base

- L'ordre de tri est typiquement le suivant :
  - les clefs courtes viennent avant les clefs longues,
  - les clefs de même taille sont triées selon un ordre lexical.
- Cette méthode correspond à l'ordre naturel des nombres s'ils sont représentés par des chaînes de chiffres.
- Son mode opératoire est :
  - prend le chiffre (ou groupe de bits) le moins significatif de chaque clef,
  - trie la liste des éléments selon ce chiffre, mais conserve l'ordre des éléments ayant le même chiffre (ce qui est un tri stable).
  - répète le tri avec chaque chiffre plus significatif.

Tri par base : exemple

- Trier la liste : 170, 45, 75, 90, 2, 24, 802, 66
- tri par le chiffre le moins significatif (unités) :
- 170, 90, 2, 802, 24, 45, 75, 66
- tri par le chiffre suivant (dizaines) :
- 2, 802, 24, 45, 66, 170, 75, 90
- tri par le chiffre le plus significatif (centaines) :
- 2, 24, 45, 66, 75, 90, 170, 802

Tri par base

- Pour i de 1 à d
  - Utiliser un tri stable pour trier le tableau T sur le digit i
    - Créer un tableau de (base) listes
    - Ajouter chaque clef à la liste correspondante
    - Recomposer le tableau T en parcourant les listes
- digit i dans la base b du nombre n
  - digit(i, b, n) = [n / $b^{(i-1)}$] modulo b
  - digit(2, 10, 324) = [324/10] modulo 10 = 2

- Complexité ?

Tri par insertion (rappel)

- Dans l'algorithme, on parcourt le tableau à trier du début à la fin. Au moment où on considère le i-ème élément, les éléments qui le précèdent sont déjà triés.
- L'objectif d'une étape est d'insérer le i-ème élément à sa place parmi ceux qui précèdent.
  - trouver où l'élément doit être inséré en le comparant aux autres,
  - décaler les éléments afin de pouvoir effectuer l'insertion.
- Le tri par insertion est
  - un tri stable (conservant l'ordre d'apparition des éléments égaux)
  - un tri en place (il n'utilise pas de tableau auxiliaire).

Tri par insertion

- Avantages
  - Implémentation simple
  - Efficace pour les petits ensemble de données
  - Efficace pour les ensembles de données qui sont presque déjà triés : complexité O(n + d), où d est le nombre d'inversions
  - Stable
  - En place
  - Au vol (online) : on peut trier une liste comme on la reçoit
- Inconvénients
  - Pire des cas quadratique
  - Fait beaucoup d'échanges (décalages)

Tri fusion

- L'algorithme peut être décrit récursivement :
  - On découpe en deux parties à peu près égales les données à trier
  - On trie les données de chaque partie
  - On fusionne les deux parties
- La récursivité s'arrête car on finit par arriver à des listes composées d'un seul élément et le tri est alors trivial.
- Complexité : O(n log(n))
  - Chaque niveau procède à des fusions dont le coût total est O(n)
  - La profondeur maximale est log(n)

Tri fusion

- Très bonne complexité
- Toujours au pire O(n log(n))
- Pénible à écrire pour des tableaux
- Beaucoup plus adapté aux listes

Tri par sélection

- Sur un tableau de n éléments (numérotés de 1 à n), le principe du tri par sélection est le suivant :
  - rechercher le plus petit élément du tableau, et l'échanger avec l'élément d'indice 1 ;
  - rechercher le second plus petit élément du tableau, et l'échanger avec l'élément d'indice 2 ;
  - continuer de cette façon jusqu'à ce que le tableau soit entièrement trié.
- L'invariant de boucle suivant permet de prouver sa correction :
  - à la fin de l'étape i, le tableau est une permutation du tableau initial et les i premiers éléments du tableau coïncident avec les i premiers éléments du tableau trié.

Tri par sélection

- Tri sur place (les éléments sont triés dans la structure)
- Complexité : dans tous les cas, pour trier n éléments, le tri par sélection effectue n(n – 1)/2 comparaisons. Sa complexité est donc $O(n^2)$. De ce point de vue, il est inefficace. Il est même moins bon que le tri par insertion
- Par contre, le tri par sélection n'effectue que peu d'échanges :
  - n – 1 échanges dans le pire cas, qui est atteint par exemple lorsqu'on trie la séquence 2,3,…,n,1 ;
  - en moyenne
  - aucun si l'entrée est déjà triée.
- Ce tri est donc intéressant lorsque les éléments sont aisément comparables, mais coûteux à déplacer dans la structure.

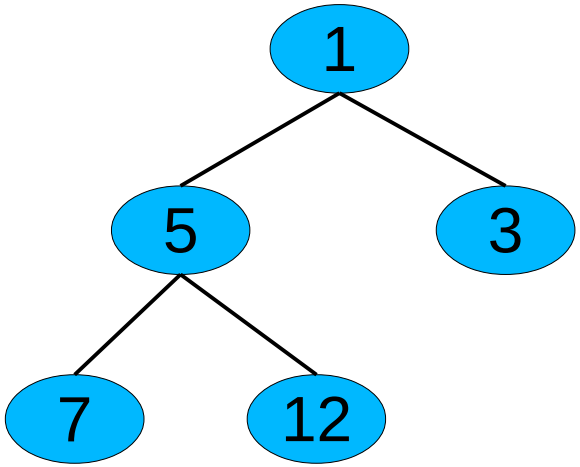
Tri par Tas

- Le tri par tas fonctionne comme le tri par sélection mais utilise une structure de données particulière pour accélérer la recherche : un tas
- Conceptuellement, le tas est un type d'arbre
- Cependant, on peut le réaliser par un tableau

Tas

- Un tas est descendant si
  - chaque nœud est de valeur inférieure à celle de ces deux fils.
- Propriétés
  - Chaque chemin est croissant
  - Le père est le minimum
- Un tas est ascendant si
  - chaque nœud est de valeur supérieure à celle de ces deux fils.
- Propriétés
  - Chaque chemin est décroissant
  - Le père est le maximum

Réalisation d'un tas par un tableau



T[1] = 1
T[2] = 5
T[3] = 3
T[4] = 7
T[5] = 12
T[6] = vide
T[7] = vide

Le père de l'élément T[i] est l'élément T[i/2]

Tas : insertion

```
inserer(T[], n, i, elt)
  T[i] ← elt
  père ← i/2
  fils ← i
  tant que père > 0 et T[père] > T[fils]
    échanger(T[père], T[fils])
    fils ← père
    père ← père/2
```

Tas : extraction

- L'opération de **tamisage** consiste à échanger la racine avec le plus petit de ses fils (si elle est plus grande), et ainsi de suite récursivement jusqu'à ce qu'elle soit à sa place.

- L’extraction consiste à
  - Supprimer la racine
  - Mettre à sa place le dernier élément du tas
  - Tamiser le tas

Tas : tamisage

```
tamiser(T[],n)
  père ← 1
  fils ← 2*père
  fini ← faux
  tant que fils ≤ n et non fini
    si fils<n et T[fils + 1] < T[fils]
      fils ← fils+1
    si T[père] > T[fils]
      échanger(T[père], T[fils])
      père ← fils
      fils ← 2*père
    sinon
      fini ← vrai
```

Tas : extraction

```
entier extraire(T[], n)
      res ← T[1]
      échanger(T[1], T[n])
      tamiser(T, n – 1)
      renvoyer res
```

Tri par tas

- On insère tous les éléments dans le tableau
- On extrait successivement toutes les racines
- Complexité : O(n log n)
- En place
- Un des meilleurs algorithmes de tri
- Le tri par tas a certains défauts (ex : il n'est pas stable) mais la structure de tas est très pratique pour répondre à d’autres problèmes

Merci de votre attention