Modélisation de l'incertitude (M2 MIAGE IA²)

Andrea G. B. Tettamanzi
Laboratoire I3S – Équipe SPARKS
andrea.tettamanzi@univ-cotedazur.fr

univ-cotedazur.fr

Séance 3
Inférence dans les réseaux bayésiens

Dans cette séance

- Inférence exacte
- Inférence approchée

Inférence

- Calcul des probabilités a posteriori
  - Pour un ensemble de variables X_i (**requête**)
  - Étant donné un événement observé, c-à-d une affectation de valeurs à un ensemble de variables E_i (**évidence**)
  - Pour simplicité on supposera juste une variable évidence (mais on peut généraliser)
- Pour rappel, les variables Y_i en dehors de la requête et de l'évidence sont dites **cachées**

Plusieurs tâches possibles

- Requêtes simples : calculer la distribution marginale a posteriori $P(X_i \mid \mathbf{E} = \mathbf{e})$
- Décisions optimales : typiquement en prenant aussi en compte l'utilité, *P*(résultat | action, **E**)
- Valeur de l'information : quelle évidence vaut-il mieux chercher ?
- Analyse de sensibilité : quelles valeurs de probabilité sont les plus critiques ?
- Explication : pourquoi faut-il changer le démarreur ?

Inférence exacte par énumération

- Énumération exhaustive de toutes les valeurs des variables requête
- Pour chaque valeur, on calcule sa probabilité et on somme
- Recherche en profondeur d'abord
  - $O(n)$ en espace
  - $O(2^n)$ en temps

Algorithme d'énumération

function ENUMERATIONASK(X,$\mathbf{e}$,bn) **returns** a distribution over X
inputs: X, the query variable
    $\mathbf{e}$, evidence specified as an event
    bn, a belief network specifying joint distribution $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n)$

```
Q(x) ← a distribution over X
for each value x_i of X do
    extend e with value x_i for X
    Q(x_i) ← EnumerateAll(Vars[bn], e)
return Normalize(Q(X))
```

ENUMERATEALL($vars$,$\mathbf{e}$) **returns** a real number

```
if Empty?(vars) then return 1.0
else do
    Y ← First(vars)
    if Y has value y in e
        then return P(y | Pa(Y)) × EnumerateAll(Rest(vars), e)
        else return Σ_y P(y | Pa(Y)) × EnumerateAll(Rest(vars), e_y)
            where e_y is e extended with Y = y
```

Élimination de variables

- L'algorithme d'énumération peut être amélioré
  - Beaucoup de calculs répétés
- Élimination de variables
  - Calculer les sommes de droite à gauche
  - Stocker les résultats intermédiaires (facteurs) pour éviter les calculs répétés
  - Sortir tout facteur constant de la somme

Algorithme élimination de variables

```
function ELIMINATIONASK(X,e,bn) returns a distribution over X
    inputs: X, the query variable
            e, evidence specified as an event
            bn, a belief network specifying joint distribution P(X_1, ..., X_n)

    if X ∈ e then return observed point distribution for X
    factors ← [ ]; vars ← REVERSE(VARS[bn])
    for each var in vars do
        factors ← [MAKEFACTOR(var, e)|factors]
        if var is a hidden variable then factors ← SUMOUT(var,factors)
    return NORMALIZE(POINTWISEPRODUCT(factors))
```

Produit point à point :

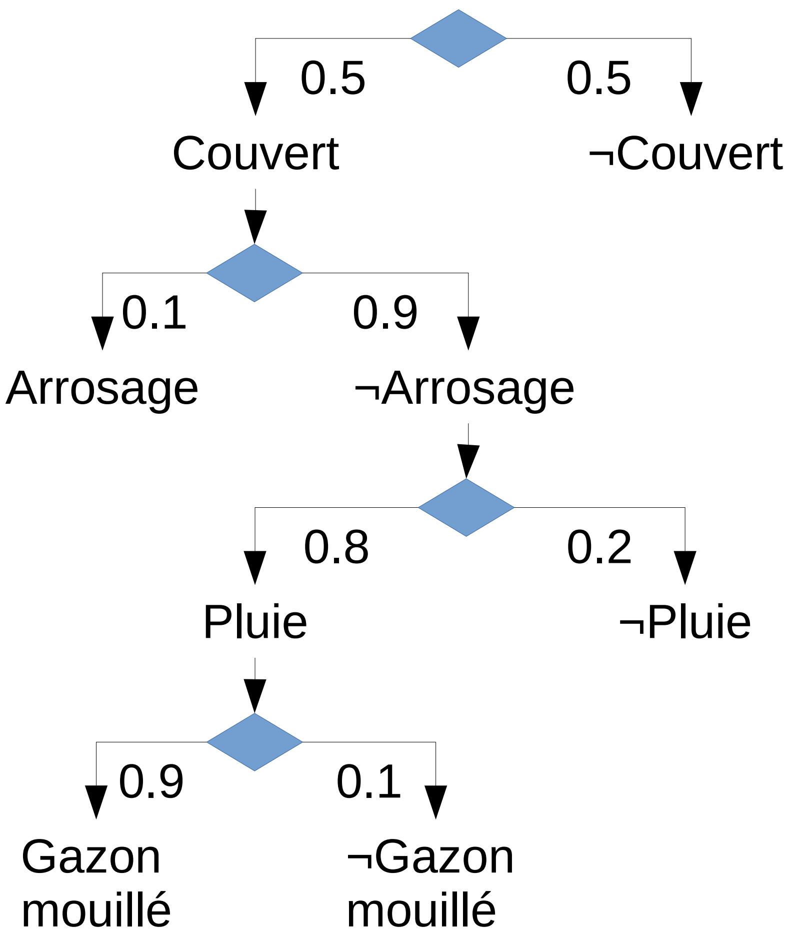
$$f_1(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_k) \cdot f_2(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l) \\ = f(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$$

Inférence approchée

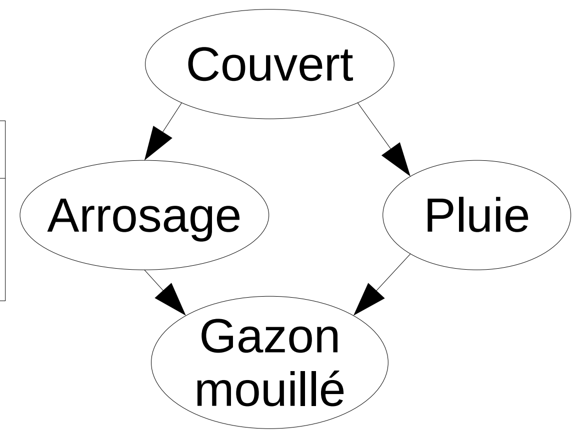
- On utilise une méthode Monte Carlo (stochastique) :
  - Tirer *N* échantillons d'une distribution *S*
  - Calculer une probabilité a posteriori approchée *P**
  - Montrer que cela converge vers la vraie probabilité *P*

- Il faut donc introduire les notions suivantes :
  - Échantillonnage à partir d'un réseau bayésien « vide »
  - Méthode du rejet : on gette les échaintillon qui ne correspondent pas à l'évidence
  - Pondération suivant la vraisemblance : on utilise l'évidence pour pondérer les échantillons
  - Échantillonnage de Gibbs : on construit un processus stochastique dont la distribution stationnaire est la vraie distribution a posteriori

Échantillonnage d'un RB vide



P(C) = 0.5



C	P(A)
V	0.1
F	0.5

C	P(Pl)
V	0.8
F	0.2

A	Pl	P(Gm)
V	V	0.99
V	F	0.90
F	V	0.90
F	F	0.00

Méthode du rejet

- Méthode générale pour générer des échantillons suivant une loi de probabilité arbitraire
- Appliquée aux RB, étant donnée de l’évidence. elle donne :
  - Tirer un échantillon du RB vide (sans évidence)
  - Rejeter tout échantillon qui ne correspond pas à l’évidence (= où la valeur des variables évidence ne s’accorde pas avec l’observation)
  - Répéter plusieurs fois, jusqu’à ce que le nombre d’échantillons retenus est suffisant
  - Calculer les probabilités sur la base des échantillons retenus

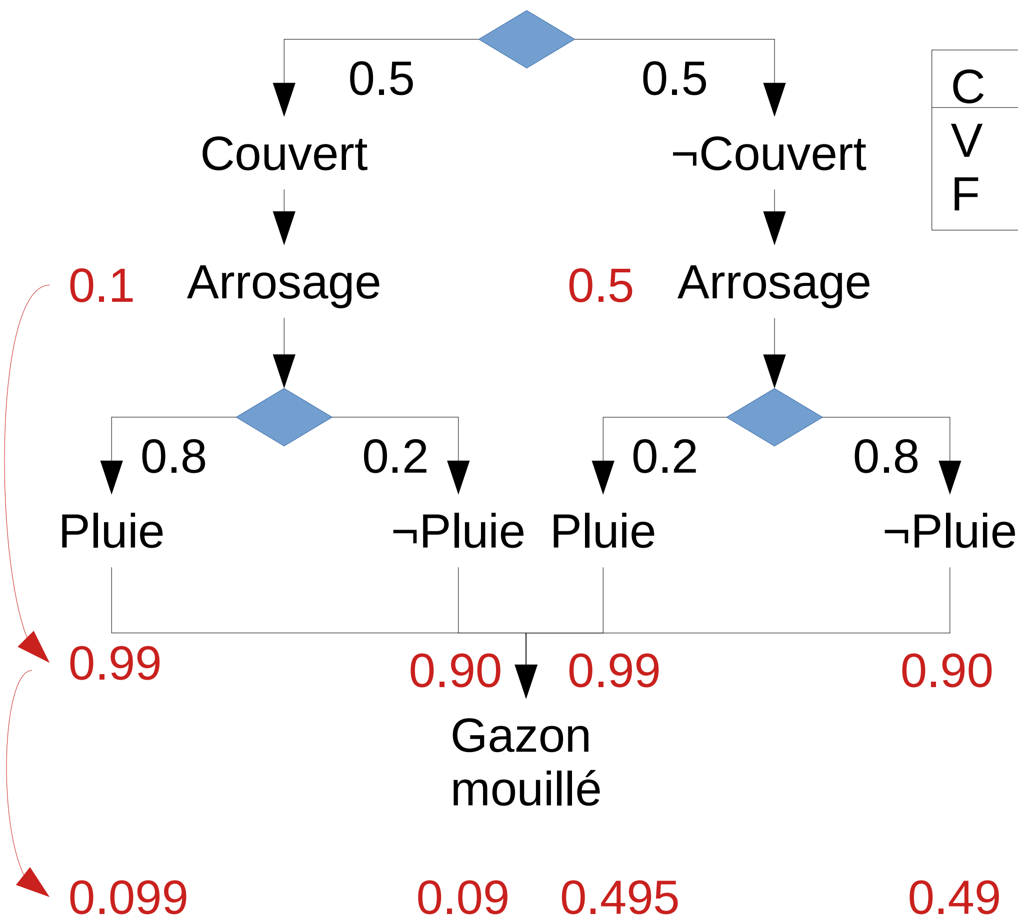
Pondération suivant la vraisemblance

- Un cas particulier de l'échantillonnage préférentiel
- Idée :
  - On fixe les valeurs des variables évidence
  - On pondère chaque échantillon suivant la probabilité qu'il accorde à l'évidence

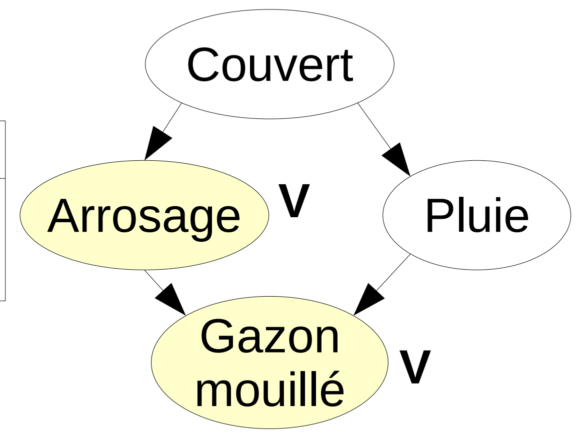
$$w = \prod_{i \in E} P(X_i = e_i \mid Parents(X_i))$$

Exemple

On veut estimer $P(\text{Pl} \mid \text{A, Gm})$



P(C) = 0.5



C	P(A)
V	0.1
F	0.5

C	P(Pl)
V	0.8
F	0.2

A	Pl	P(Gm)
V	V	0.99
V	F	0.90
F	V	0.90
F	F	0.00

Échantillonnage de Gibbs

- On construit une chaîne de Markov (processus stochastique)
- État du processus = réalisation des variables du RB
- On génère le prochain état en
  - Échantillonnant chaque variable étant données les valeurs courantes des autres variables
  - Gardant l’évidence fixée
- Ce processus converge à une distribution stationnaire
- La limite pour t → ∞ du nombre de visites à chaque état est proportionnel à la probabilité de la réalisation correspondante
- Probabilité d’une valeur ≈ fréquence d’observation de la valeur