UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Modélisation de l'incertitude (M2 MIAGE IA²)

Andrea G. B. Tettamanzi
Laboratoire I3S – Équipe SPARKS
andrea.tettamanzi@univ-cotedazur.fr

univ-cotedazur.fr

Séance 6
Théorie des ensembles flous
Logique floue

Dans cette séance

- Introduction
- Théorie des ensembles flous
- Logique floue

Introduction

- Logique floue :
  - Au sens large : une théorie mathématique pour traiter l'imprécision et les notions vagues du langage naturel
  - Au sens stricte : une logique multivaluée basée sur cette théorie
- Introduite par Lotfi A. Zadeh en 1965
- Idée de fond : remplacer les deux valeurs de vérité « vrai » et « faux » par un degré continu compris entre 0 (pleinement faux) et 1 (pleinement vrai)
- Théorie des ensembles flous
  - L'extension de la logique classique s'appuie sur la définition d'ensemble

Ensembles Flous

- Un ensemble « classique » est complètement spécifié par une fonction caractéristique $\chi : U \rightarrow \{0, 1\}$, telle que, pour tout $x \in U$,
  - $\chi(x) = 1$, si et seulement si x appartient à l'ensemble
  - $\chi(x) = 0$, autrement.
- Pour définir un ensemble « flou », on remplace χ par une fonction d'appartenance $\mu : U \rightarrow [0, 1]$, telle que, pour tout $x \in U$,
  - $0 \leq \mu(x) \leq 1$ est le degré auquel x appartient à l'ensemble
- Puisque la fonction μ spécifie complètement l'ensemble, on peut dire que μ « est » l'ensemble
- Un ensemble classique est un cas particulier d'ensemble flou !
- L'univers U est le référentiel de l'ensemble μ

Représentation

Référentiel fini :

$$A = \sum_{x \in U} \frac{\alpha_x}{x}$$

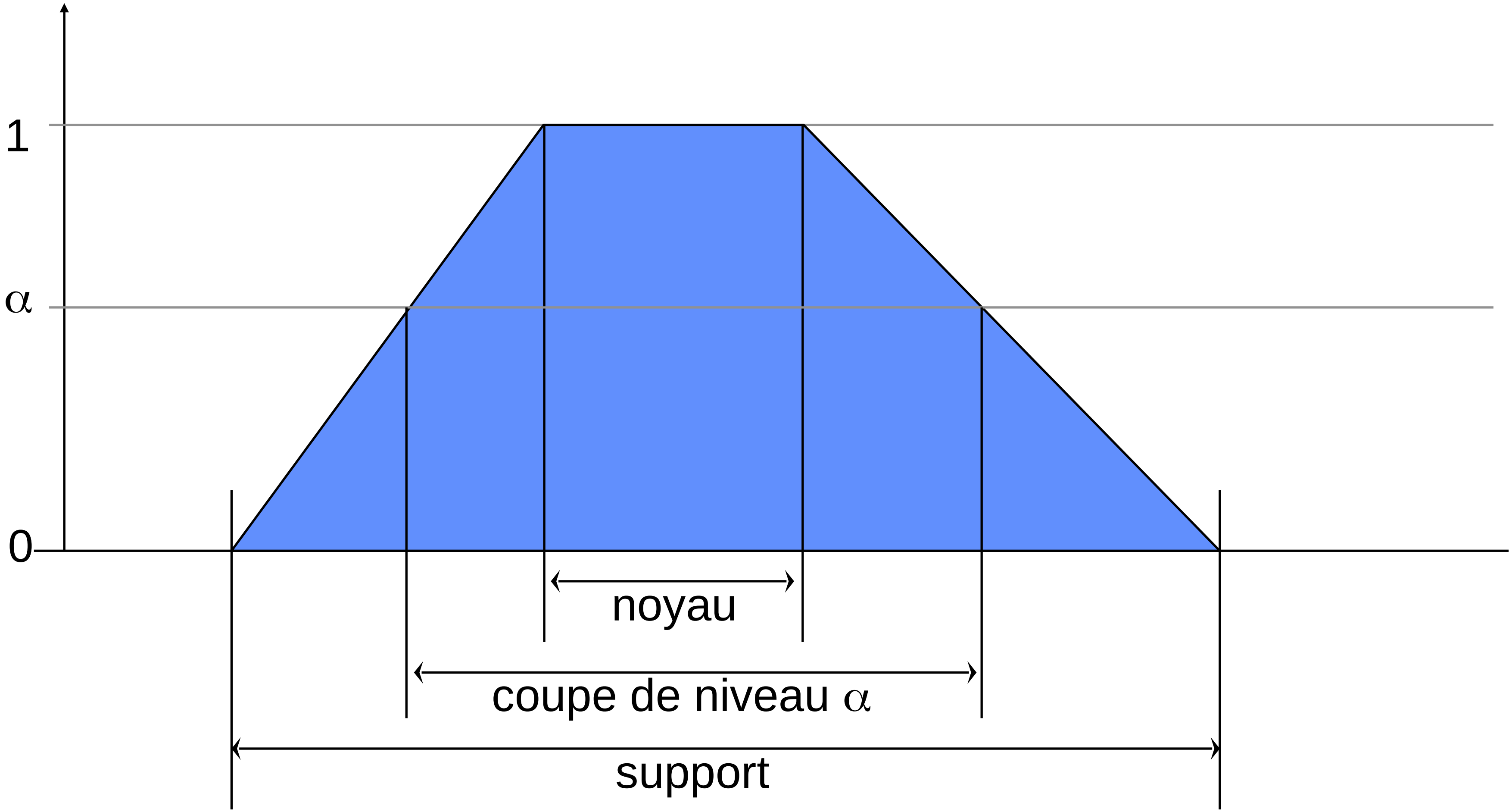
MarqueAutoSportive = 0.8/BMW + 1/Ferrari + 0/Fiat + 0.5/Mercedes + …

Référentiel infini :

$$A = \int_{x \in U} \frac{\mu(x)}{x}$$

$$\mathsf{Chaud} = \int_{t=-273,15}^{+\infty} \frac{1/(1 - e^{\lambda(20-t)})}{t}$$

Ensembles flous



Opérations sur les ensembles flous

- Extension des opérations sur les ensembles classiques
- Normes et co-normes triangulaires
- Min et max sont un choix populaire

$$\begin{aligned}(A \cup B)(x) &= \max\{A(x), B(x)\} \\ (A \cap B)(x) &= \min\{A(x), B(x)\} \\ \bar{A}(x) &= 1 - A(x)\end{aligned}$$

Principe d'extension

- Soit deux univers U et V et une application $f : U \rightarrow V$
- Soit A un ensemble flou dans U
- On peut alors définir un ensemble flou $B = f(A)$ tel que, pour tout $y \in V$:
  - $B(y) = \max\{A(x) : x \in U, f(x) = y\}$
  - $B(y) = 0$, si y n'appartient pas à l'image de f
- Ce principe nous permet de « flouifier » (= définir une extension floue) de théories « classiques »
  - Exemple : nombres flous → arithmétique floue

Logique floue (au sens stricte)

- La théorie des ensembles flous nous permet d'introduire des propositions et des prédicats flous
- Pour les propositions, il suffit de raisonner en termes des interprétations :
  - Une interprétation est définie par l'ensemble des proposition qui sont vraies
  - Proposition floue : vérité partielle
- Pour les prédicats, on considère l'identité entre un prédicat et l'ensemble des individus qui le satisfont (son extension)
  - Un prédicat flou sera donc un prédicat dont l'extension est un ensemble flou
- Les opérations logiques sont définies par conséquent

Opérations logiques

- Soit τ la fonction qui assigne à une proposition sa valeur de vérité
- Soient P, Q et R des propositions
  - $\tau(P \wedge Q) = \min\{\tau(P), \tau(Q)\}$
  - $\tau(P \vee Q) = \max\{\tau(P), \tau(Q)\}$
  - $\tau(\neg P) = 1 - \tau(P)$
- L'implication n'a pas une définition univoque :
  - $\tau(P \rightarrow Q) = \max\{1 - \tau(P), \tau(Q)\}$, car $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$ [K.-D.]
  - $\tau(P \rightarrow Q) = \min\{\tau(P), \tau(Q)\}$ [Mamdani]
  - $\tau(P) \leq \tau(Q)$ [Zadeh]
  - Etc.

Systèmes de règles floues

- Variables et valeurs linguistiques
- Clause floue :
  X is *A*
- Règle :
  IF *antécendant* THEN *conséquant*
- Méthodes de « déflouification »

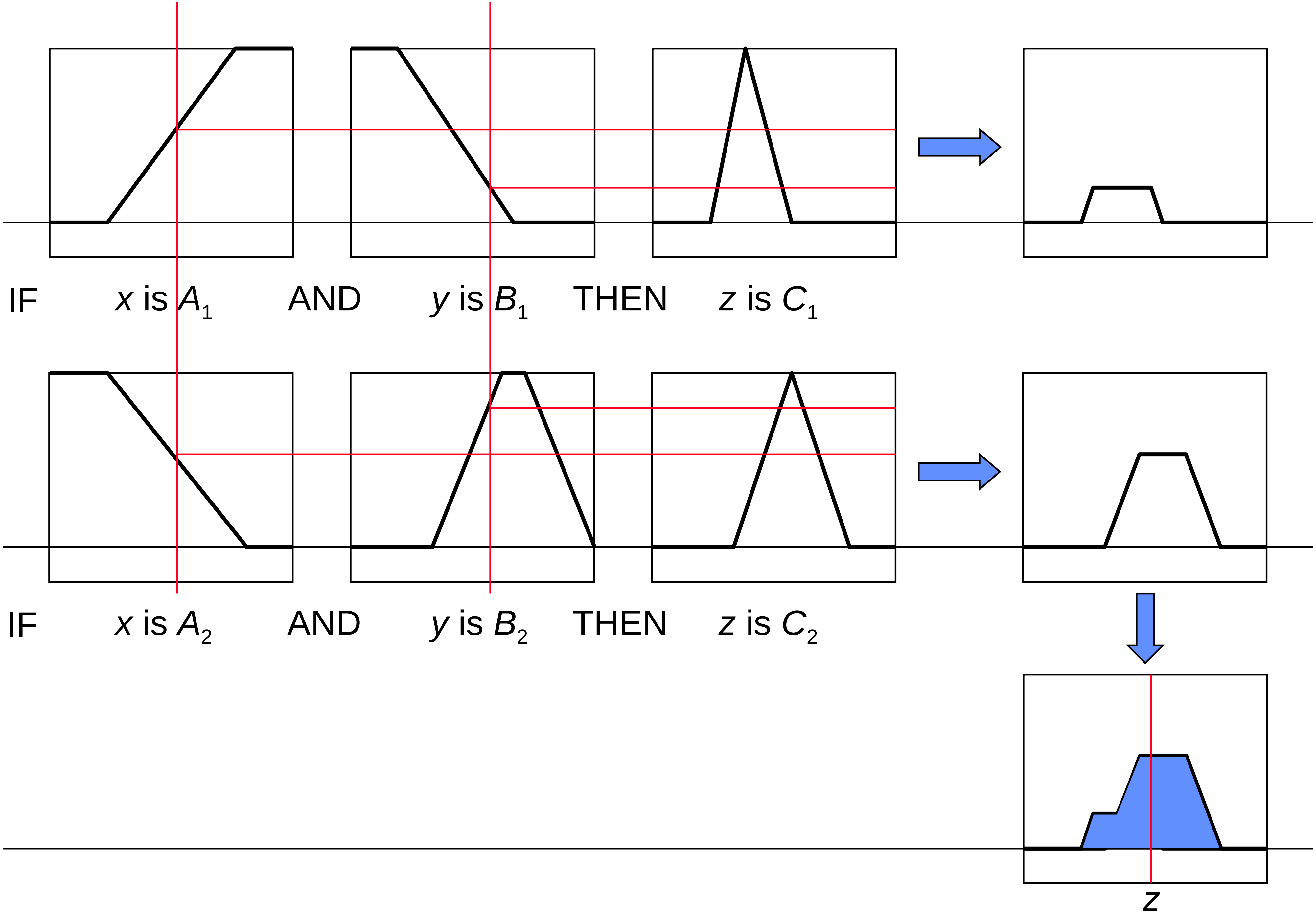
Inférence dans les systèmes de règles floues

Soit un ensemble de règles

$$\begin{array}{ll} \text{IF } P_1(x_1, \ldots, x_n) & \text{THEN } Q_1(y_1, \ldots, y_m), \\ \vdots & \vdots \\ \text{IF } P_r(x_1, \ldots, x_n) & \text{THEN } Q_r(y_1, \ldots, y_m), \end{array}$$

L'ensemble flou des valeurs des variables dépendantes est :

$$\begin{aligned} &\tau_R(y_1, \ldots, y_m; x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad = \sup_{1 \leq i \leq r} \min\{\tau_{Q_i}(y_1, \ldots, y_m), \tau_{P_i}(x_1, \ldots, x_n)\}. \end{aligned}$$


IF x is A_1 AND y is B_1 THEN z is C_1
IF x is A_2 AND y is B_2 THEN z is C_2
z

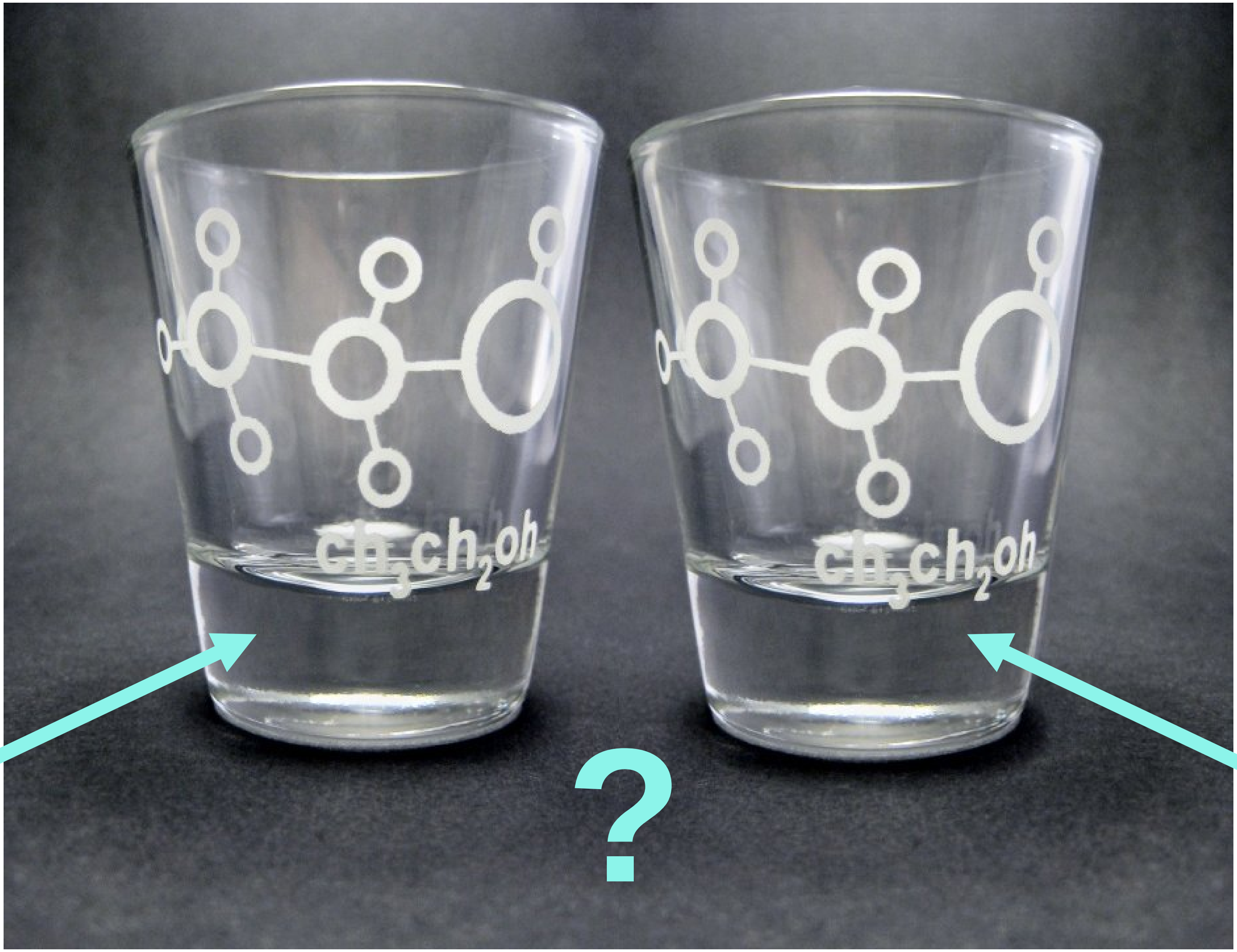
Ensembles flous et Probabilité

- Degrés d'appartenance et probabilités définis en [0, 1].
- Algèbre très similaire (ex., treillis, De Morgan).
- Cependant, ils représentent des concepts distincts et indépendants :
  – Degré d'appartenance : **imprécision**.
  – Probabilité : **incertitude**.

Ensembles flous et Probabilité

- La clé pour comprendre la différence est le concept d'événement :
  - Un ensemble d'événements élémentaires (points dans un espace mesurable);
  - Étant donné un événement A :
    - Probabilité = intégral sur A d'une mesure de probabilité;
    - Degré d'appartenance = degré auquel le résultat d'une expérience ou un membre de l'échantillon « est » A.

Exemple (Bezdek 1993)



95% probability of being healthful and good

95% membershipin the set of healthful and good drinks