MICHEL QUEYSANNE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Ancien professeur de Mathématiques Spéciales
Maître-assistant à l'Université Paris VII

ALGÈBRE

Premier cycle et préparation aux Grandes Écoles

AVANT-PROPOS

Le présent livre développe les théories classiques d'*Algèbre* correspondant au niveau suivant immédiatement celui du Baccalauréat : il est donc destiné en premier lieu aussi bien aux étudiants des deux années du *Premier Cycle de l'Enseignement Supérieur* qu'à ceux qui préparent les Concours d'entrée aux Grandes Écoles Scientifiques dans les *Classes Préparatoires* des Lycées.

Il est destiné également à toute personne ayant besoin de bonnes connaissances de base en Algèbre dans l'exercice de son activité professionnelle. C'est pour cela que l'on a pas voulu s'enfermer strictement dans la lettre des programmes du Premier Cycle universitaire ou de ceux des Classes Préparatoires.

[...]

M.Q.

N. B. - Chaque chapitre est en général divisé en sections (I, II, ...). Les sections sont divisées en paragraphes numérotés d'un bout à l'autre de 1 à 240. Les références renvoient aux paragraphes (exemple : cf. § 25). Les exemples et exercices inclus dans le texte sont numérotés par paragraphe (exemple : § 137, ex. 4). Les exercices de fin de chapitre sont numérotés d'un bout du livre à l'autre (exemple : ex. 208, fin du chapitre 8).

1

ENSEMBLES APPLICATIONS RELATIONS

I. Introduction. Notions de logique. Ensemble (élément,

I - Introduction. Notions de logique. Ensemble (élément, appartenance)

1. Introduction

Une théorie mathématique se présente sous la forme d'une suite d'énoncés (définitions et propositions) tels que toute définition soit donnée au moyen de termes déjà définis et que toute définition soit démontrée à l'aide de propositions déjà admises. C'est cet ordre logique dans les énoncés qui transforme une collection de résultats sans lien les uns avec les autres en une *théorie déductive* : le premier essai de constitution d'une telle théorie remonte à Euclide, ou à ses prédécesseurs immédiats (IV^{e} et III^{e} siècles avant J.-C.).

Ces considérations appellent plusieurs remarques :

--- Les définitions, les propositions et leurs démonstrations sont énoncées avec les *mots d'une langue* (le grec pour Euclide, le français pour nous) en leur laissant leur acception courante si aucune confusion n'est à craindre, en précisant certains termes dans le cas contraire.
--- Les démonstrations sont effectuées à l'aide des *règles de la logique*. L'histoire de la pensée montre, d'ailleurs, que l'élaboration de la logique et la constitution des premiers « Éléments » de Mathématiques se sont effectués conjointement et que, à chaque moment de l'histoire où un souci de riguer plus grand s'est manifesté (XVII^{e} siècle, fin du XIX^{e} et début du XX^{e}), il y a eu action réciproque entre la logique et les mathématiques [...].
--- [...]

2. Notions de logique

Une **assertion** est un énoncé dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou s'il est faux.

Par exemple : « 3 < 10 » est une assertion vraie; « 5 < 2 » est une assertion fausse. « Tout triangle isoscèle est équiangle » est une assertion vraie.

Les énoncés que nous rencontrerons le plus souvent sont d'une nature plus générale : Ils contiendrons des *variables*, ils seront vrais pour certaines valeurs attribuées aux variables, faux pour toutes les autres valeurs. Un tel énoncé s'appelle une **proposition.** Nous représenterons une proposition par une lettre P, Q, R...

Par exemple : « x > 10 » est une proposition, elle est vraie pour les nombres strictement supérieurs à 10, fausse dans tous les autres cas.

« La hauteur du triangle T est médiane du triangle T » est une proposition vraie pour les triangles T isoscèles, fausse dans tous les autres cas.

Cette attitude élémentaire ne préjuge pas de l'existence ou de la non-existence d'énoncés dont on ne saurait démontrer s'ils sont vrais ou s'ils sont faux.

On voit qu'une assertion est une proposition toujours vraie ou toujours fausse.

La **négation** d'une proposition « P » que nous noterons « *non* P » est vraie lorsque P est fausse, fausse lorsque P est vraie.

La négation d'une proposition peut être schématisée par le tableau 1 qui s'appelle une *table de vérité* :

P	**non P**
V	F
F	V

Tableau 1.

P 1	**Q 2**	**P et Q 3**	**P ou Q 4**	**P ⇒ Q 5**	**P ⇔ Q 6**
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Tableau 2.

[...]

La proposition « (*non* P) *ou* Q) » appelée **implication** (col. 5) se note :

(1) $P \Rightarrow Q$

et s'énonce : « P *implique* Q » ou « P *entraîne* Q ».

3. Notion d'ensemble

II - Inclusion. Réunion. Intersection

4. Inclusion. Partie. Complémentaire. Ensemble des parties

a) Nous dirons qu'un ensemble F est *inclus* dans un ensemble E lorsque *tout élément* de F *appartient à* E; on écrit :

(1) $F \subset E$

par définition :

(2) $F \subset E \Leftrightarrow$ (pour tout x) ($x \in F \Rightarrow x \in E$)

[...]

5. Intersection et réunion des ensembles

6. Propriétés définies sur un ensemble. Quantificateurs

III - Produit cartésien. Relations. Correspondances

7. Produit cartésien

IV - Applications de A dans B

V - Relations d'équivalence

VI - Relations d'ordre

VII - Conclusion

2

ENTIERS NATURELS

I - Ensemble N des entiers naturels

[...]

8. Introduction des intiers naturels

Designons par E un ensemble non vide possédant les trois propriétés désignées ci-dessous par N_1, N_2, N_3.

Axiome N_1. E est un ensemble ordonné, toute partie non vide de E a un plus petit élément.

[...]

9. Notion de récurrence

Il arrive que l'on prenne pour l'un des axiomes définissant **N** le résultat suivant qui est le principe de raisonnement par récurrence; avec le mode déxposition adopté cet énoncé est un théorème.

Théorème Toute partie X de **N** telle que

$$p(0) \quad \text{et} \quad [(\forall\, x \in \mathbf{N})\ (p(x) \Rightarrow p(x'))]$$

alors p est vraie pour tout x de **N**.