

# Procedimiento simple de separación de fuentes

Rubén Martín Clemente<sup>(1)</sup>, Vicente Zarzoso<sup>(2)</sup>  
 ruben@us.es, zarzoso@i3s.unice.fr

<sup>(1)</sup>Dpto. de Teoría de la Señal y Comunicaciones, Universidad de Sevilla.

<sup>(2)</sup>I3S Laboratory. University of Nice Sophia Antipolis.

**Abstract**—A new method for the blind separation of sources is presented. The estimation algorithm only requires the computation of certain first-order order statistics of the whitened observed signals, so that the computational complexity of the resulting method is very low. Computer experiments and experiments with real data show the effectiveness of the proposed approach.

## I. INTRODUCCIÓN

Por «separación ciega de fuentes» se entiende el problema de separar señales («fuentes») mezcladas, utilizando la menor cantidad posible de información sobre las mismas (de aquí el adjetivo «ciega») [1]–[3]. El modelo más simple, pero también más habitual, presupone la observación de una serie de señales  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  que, a su vez, resultan de la «mezcla» o combinación lineal de otras señales, desconocidas,  $s_1(t), \dots, s_N(t)$  (las «fuentes»), siendo la expresión matemática de la mezcla como sigue:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11} s_1(t) + \dots + a_{1N} s_N(t) \\ &\vdots \\ x_N(t) &= a_{N1} s_1(t) + \dots + a_{NN} s_N(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Este modelo se emplea en una gran cantidad de situaciones, pudiéndose reseñar, por su especial interés, las que aparecen en problemas relacionados con la ingeniería biomédica: así, por ejemplo, (1) es el modelo generativo básico utilizado en electrocardiografía fetal [4]–[6], ha sido empleado para la caracterización del electrocardiograma [7], en el estudio del control nervioso del músculo cardíaco [8] y en el análisis de la respuesta cerebral ante eventos inesperados [9], por citar sólo algunos ejemplos. En todos estos casos, las observaciones  $x_i(t)$  corresponden a señales registradas directamente, por medio de electrodos, sobre la piel del paciente, mientras que las fuentes se interpretan como potenciales bioeléctricos de diverso origen generados en el interior del cuerpo humano [9].

Matricialmente, (1) se escribe:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}(t) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_N(t)]'$  es el vector que contiene a las observaciones,  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \dots s_N(t)]'$  es el vector de fuentes y la matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  representa la transformación lineal que relaciona ambos vectores. Nótese que tanto  $\mathbf{s}(t)$  como  $\mathbf{A}$  son desconocidos, siendo  $\mathbf{x}(t)$  dato.

El problema de la «separación ciega de fuentes» se plantea como aquél que consiste en la estimación del vector  $\mathbf{s}(t)$  a partir de  $\mathbf{x}(t)$ . Para esto, se suelen asumir las siguientes hipótesis básicas: las fuentes  $s_i(t)$  son estadísticamente independientes

entre sí (esto es, el conocimiento de una no aporta información sobre las otras); a lo más, sólo una fuente tiene distribución gaussiana, y, finalmente, la matriz  $\mathbf{A}$  es invertible [1]–[3]. Asimismo, se suele suponer que las fuentes tienen media cero (sin pérdida de generalidad) y varianza uno (puesto que la amplitud real de las fuentes siempre puede ser incorporada a los coeficientes de ponderación  $a_{ij}$ ).

Nótese que  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}(t)$ , por lo que las fuentes se pueden obtener combinando linealmente las observaciones. El principio de separación más habitual es el llamado de «minimización de la gaussianidad» [1]–[3]: de acuerdo con el teorema central del límite, la distribución de cada observación  $x_i(t)$  es «más gaussiana» que la de cada una de las señales  $s_i(t)$  por separado. Se sigue que las combinaciones lineales de las observaciones que sean «mínimamente gaussianas» deben coincidir con alguna de las fuentes [1]–[3].

Por supuesto, para que este criterio sea practicable, es necesario cuantificar de alguna forma la «gaussianidad». Habitualmente, la medida de la «gaussianidad» se lleva a cabo utilizando funciones basadas en cumulantes (estadísticos de alto orden) [10]. Es bien sabido que los cumulantes de orden mayor que dos de una variable gaussiana son cero, por lo que la magnitud de estos estadísticos resulta ser apropiada para el fin que nos ocupa [1]–[3]. No obstante, la estimación práctica de los cumulantes es costosa en cuanto a tiempo de computación, resultando además que la varianza de los estimadores muestrales es muy alta, por lo que se requiere un gran número de muestras de las observaciones, en relación con el número de fuentes, para que la separación se lleve a cabo de una manera aceptable.

A causa de las anteriores deficiencias, el propósito del presente trabajo de investigación es explorar las posibilidades de un nuevo criterio para la separación de señales basado, exclusivamente, en estadísticos de primer orden. Este criterio fue ya presentado, de forma preliminar, en [11]. En el presente artículo se revisan los conceptos expuestos en [11], introduciendo nuevos resultados.

## II. PREPROCESAMIENTO

En separación ciega de fuentes es habitual llevar a cabo un tratamiento previo de las observaciones para eliminar toda correlación entre las diferentes señales  $x_i(t)$ , lo que se conoce como «blanqueado». El procedimiento, cuya utilidad reside en el hecho de que simplifica los cálculos posteriores, es el siguiente: la matriz de covarianza de las observaciones se

define como:

$$\mathbf{C}_x = E \{ \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)' \} \quad (3)$$

donde se ha supuesto implícitamente que *el valor medio de las observaciones es cero*, así como la estacionariedad de los procesos. Esta matriz es siempre simétrica y semidefinida positiva, por lo que puede ser factorizada de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}',$$

donde  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{D}$  representan, respectivamente, las matrices que contienen a los vectores y valores propios de  $\mathbf{C}_x$ . Las observaciones «blanqueadas» se definen como:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{Q}' \mathbf{x}(t). \quad (4)$$

Es inmediato comprobar que la matriz de covarianzas de  $\mathbf{z}(t)$  vale:

$$\mathbf{C}_z = E \{ \mathbf{z}(t) \mathbf{z}(t)' \} = \mathbf{I}, \quad (5)$$

siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad. De esta forma, no hay correlación entre los elementos de  $\mathbf{z}(t)$  (lo que recuerda en cierto modo a las propiedades de un «ruido blanco», de aquí el nombre). Nótese también que:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{G} \mathbf{s}(t). \quad (6)$$

Es fácil demostrar que  $\mathbf{G}$  es una matriz *ortogonal*, esto es,  $\mathbf{G} \mathbf{G}' = \mathbf{I}$ . En efecto:

$$\mathbf{C}_z = \mathbf{I} = \mathbf{G} E \{ \mathbf{s}(t) \mathbf{s}(t)' \} \mathbf{G}' = \mathbf{G} \mathbf{G}'$$

donde se ha utilizado que  $E \{ \mathbf{s}(t) \mathbf{s}(t)' \}$  debido a que las fuentes son independientes, tienen media cero y varianza uno.

Asimismo, para simplificar la notación, *omitiremos hacer explícita la dependencia de las distintas señales con el tiempo*.

### III. CRITERIO DE SEPARACIÓN

Por conveniencia de presentación, sin que conlleve pérdida alguna de generalidad, centraremos este trabajo en la recuperación de la primera fuente  $s_1$ . Consideremos el evento  $s_1 > 0$ , esto es, la fuente  $s_1$  toma un valor positivo. Sea la esperanza condicionada:

$$\mathbf{w} = E \{ \mathbf{z} | s_1 > 0 \}. \quad (7)$$

Nótese que  $\mathbf{w}$  es el resultado de promediar cada elemento de  $\mathbf{z}$ , teniendo en cuenta para este promedio sólo las muestras generadas cuando este evento tiene lugar. Haciendo uso de (6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= E \{ \mathbf{G} \mathbf{s} | s_1 > 0 \} \\ &= \mathbf{G} E \{ \mathbf{s} | s_1 > 0 \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ahora bien, como las fuentes son independientes entre sí,

$$E \{ s_i | s_1 > 0 \} = E \{ s_i \} = 0 \quad (9)$$

para  $i \neq 1$ . Definiendo  $\alpha = E \{ s_1 | s_1 > 0 \}$ , podemos afirmar que  $E \{ \mathbf{s} | s_1 > 0 \}$  es un vector cuyo primer elemento vale « $\alpha$ », *anulándose* todos los demás. Por lo tanto,  $\mathbf{w}$  resulta ser  $\alpha$  veces la primera columna de la matriz  $\mathbf{G}$ . Recordando que  $\mathbf{G}$  es ortogonal, se deduce de inmediato que:

$$\mathbf{w}' \mathbf{z} = \alpha s_1 \quad (10)$$

Por lo tanto, la proyección de  $\mathbf{z}$  sobre  $\mathbf{w}$  devuelve la primera fuente. No obstante, debe notarse que la ocurrencia del evento  $s_1 > 0$  no es observable y debe ser estimada.

### IV. MÉTODO DE SEPARACIÓN

En una primera aproximación, se propone el siguiente algoritmo:

1. Inicializar  $\mathbf{w}$  al azar.
2. Normalizar  $\mathbf{w}$  para que su longitud sea uno.
3. Estimar la primera fuente como  $\hat{s}_1 = \mathbf{w}' \mathbf{z}$ .
4. Reemplazar  $\mathbf{w}$  por  $\mathbf{w} = E \{ \mathbf{z} | \hat{s}_1 > 0 \}$ .
5. A falta de convergencia, volver al paso 2.

En la práctica, el paso 4 se implementa como sigue: dados los instantes de muestreo  $t_1, \dots, t_T$ , sea  $\mathbb{S} = \{ t_i : \hat{s}_1(t_i) > 0 \}$  el conjunto de índices para los que  $\hat{s}_1(t)$  es positivo. Entonces,  $E \{ \mathbf{z} | \hat{s}_1 > 0 \}$  se calcula como:

$$E \{ \mathbf{z} | \hat{s}_1 > 0 \} \approx \frac{1}{|\mathbb{S}|} \sum_{i \in \mathbb{S}} \mathbf{z}(t_i) \quad (11)$$

Teniendo en cuenta los argumentos expuestos en la Sección precedente, es fácil comprobar que  $\hat{s}_1 = s_1$  es un punto fijo de la iteración anterior, como se espera.

Ahora bien, existen puntos fijos indeseables: por ejemplo, consideremos el caso de tener  $N = 2$  fuentes igualmente distribuidas. Supongamos que, en el paso 3,

$$\hat{s}_1 = s_1 + s_2.$$

Entonces, en el paso 4,

$$\mathbf{w} = E \{ \mathbf{z} | \hat{s}_1 > 0 \} = \mathbf{G} E \{ \mathbf{s} | s_1 + s_2 > 0 \}$$

Como las fuentes se distribuyen de igual manera,

$$E \{ s_1 | s_1 + s_2 > 0 \} = E \{ s_2 | s_1 + s_2 > 0 \}.$$

Se sigue que  $\mathbf{w}$  es (salvo un posible factor de escala) la suma de las dos columnas de  $\mathbf{G}$ . Cuando volvamos al paso 3, se repetirá la estimación errónea  $\hat{s}_1 = s_1 + s_2$  y el algoritmo no será capaz de proporcionar ya otro resultado diferente, por más iteraciones que haga.

Las condiciones bajo las que el algoritmo converge a una solución correcta (esto es, a la estimación de una de las fuentes) no han sido aún completamente determinadas y es éste un problema en el que seguimos trabajando. No obstante, en base a ciertos resultados preliminares, se propone la siguiente conjetura:

*Conjetura 1:* La separación proporcionada por el algoritmo es correcta cuando las fuentes son platicúrticas<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Una variable aleatoria  $v$  es platicúrtica cuando su coeficiente de curtosis es negativo, esto es, cuando  $E\{v^4\} - 3E\{v^2\}^2 < 0$ , supuesto que  $E\{v\} = 0$ .

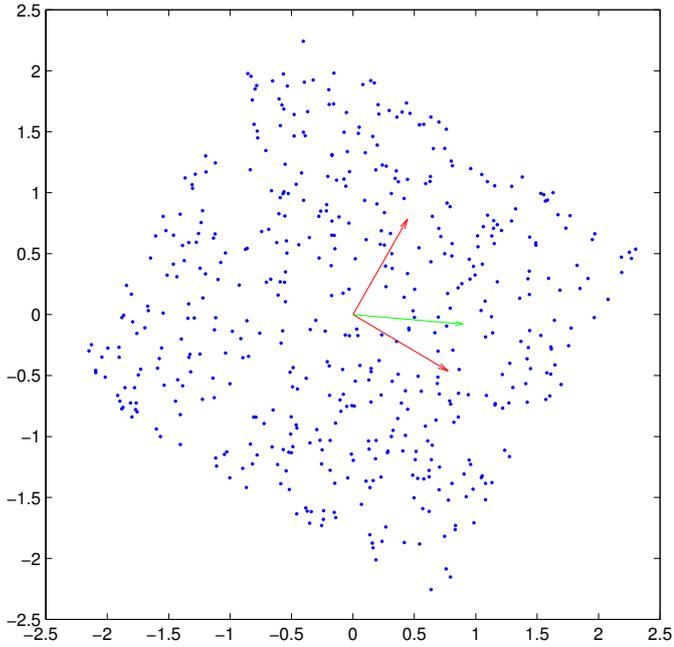


Fig. 1. Primera iteración del algoritmo.

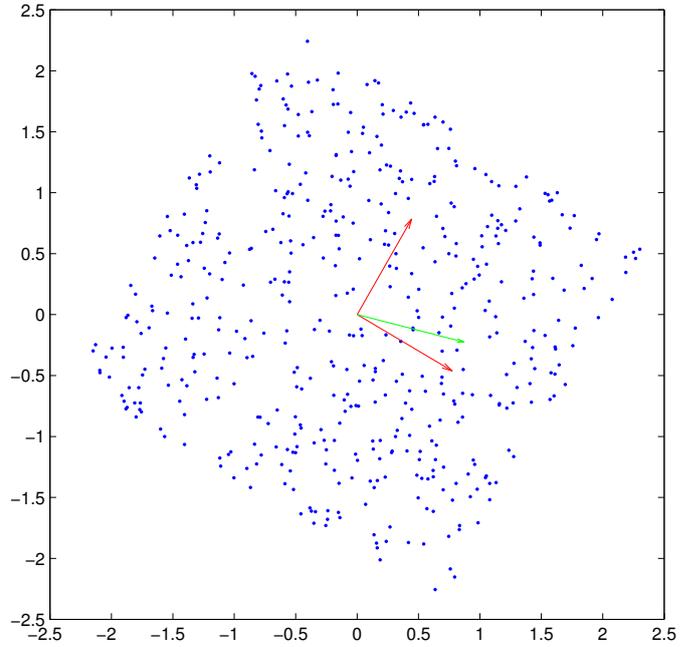


Fig. 2. Tercera iteración del algoritmo.

1. *Caso de fuentes con distribución «dispersa»:* Una situación especialmente interesante es aquella en la que la distribución de las fuentes es «dispersa», esto es, las fuentes toman normalmente valores cercanos a cero y sólo esporádicamente su amplitud es grande. La curtosis de este tipo de variables es positiva, por lo que no les es de aplicación la conjetura anterior. En esta situación, se puede hacer el siguiente razonamiento: recordando (11), es esperable que el conjunto  $\mathbb{S}$  contenga pocos instantes de tiempo en los que  $\hat{s}_1$  tome valores significativos. Se propone entonces aproximar (11) por el sumando dominante. En la práctica, se toma:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}(t_M)}{\|\mathbf{z}(t_M)\|} \quad (12)$$

donde:

$$t_M = \arg \max_t \|\mathbf{z}(t)\|, \quad (13)$$

es decir, el instante para el que la longitud de  $\mathbf{z}(t)$  es máxima.

## V. RESULTADOS

### A. Experimento 1

Se mezclan dos fuentes de distribución uniforme utilizando una matriz  $\mathbf{A}$  aleatoria. Para llevar a cabo el experimento, generamos 500 muestras de las observaciones. La figura 1 representa (como puntos azules) la localización de los vectores  $\mathbf{z}(t)$ . Las columnas de la matriz  $\mathbf{G}$  se representan como vectores de color rojo. El valor de  $\mathbf{w}$  tras la primera iteración del algoritmo es el vector de color verde. Las figuras 2 y 3 muestran la evolución del vector  $\mathbf{w}$  después de iterar tres y cinco veces. Se constata la convergencia hacia una de las soluciones deseadas, garantizando de esta forma la extracción de una de las fuentes.

### B. Experimento 2

La figura 4 muestra una serie de registros obtenidos mediante electrodos colocados sobre el abdomen de una mujer embarazada (semana 21 de gestación). Se aprecia claramente el electrocardiograma materno; sin embargo, debido a su pequeña amplitud, el electrocardiograma fetal se encuentra oculto en el ruido de fondo y no puede ser observado a simple vista. Las dos primeras señales (contando desde arriba) han sido registradas sobre el pecho de la paciente, mientras que las restantes corresponden al abdomen.

Las señales han sido procesadas utilizando el algoritmo descrito por la ecuación (12), en conjunción con el método descrito en [12]. Se aprecia la recuperación del electrocardiograma fetal (tercera señal empezando desde arriba): en efecto, esta señal muestra una componente periódica cuya frecuencia fundamental es aproximadamente el doble que la frecuencia del potencial cardíaco materno (segunda señal desde arriba), como corresponde al ritmo cardíaco fetal.

La señal fetal obtenida aún es demasiado ruidosa y no puede apreciarse correctamente la morfología del electrocardiograma, a excepción de la onda R (las ondas P, Q, S y T no se observan a simple vista). No obstante, el resultado mejora apreciablemente filtrando la señal con filtros comunes empleados en electrocardiografía, por lo que no se incidirá en este problema.

## VI. CONCLUSIONES

Se ha presentado un principio de separación ciega de señales basado únicamente en la utilización de estadísticos de primer orden (promedios estadísticos condicionados). Asimismo, se han propuesto un par de algoritmos inspirados por este principio que destacan por su simplicidad computacional, lo

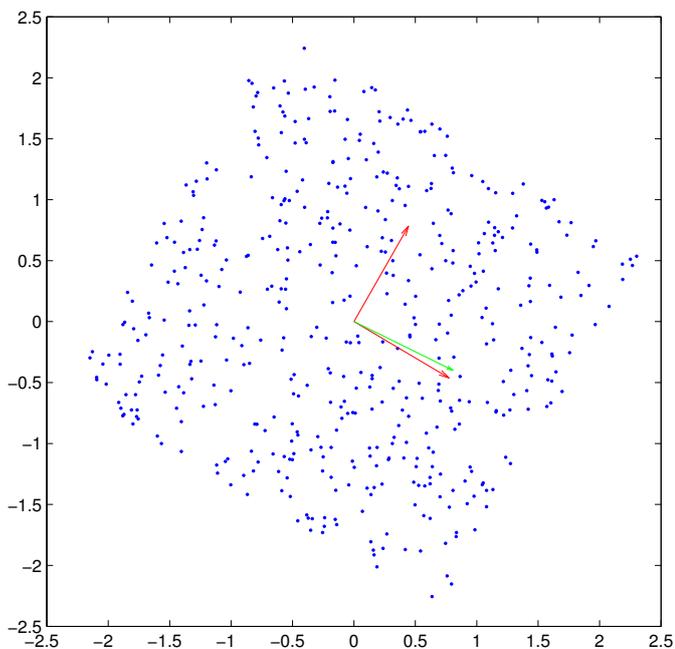


Fig. 3. Quinta iteración del algoritmo.

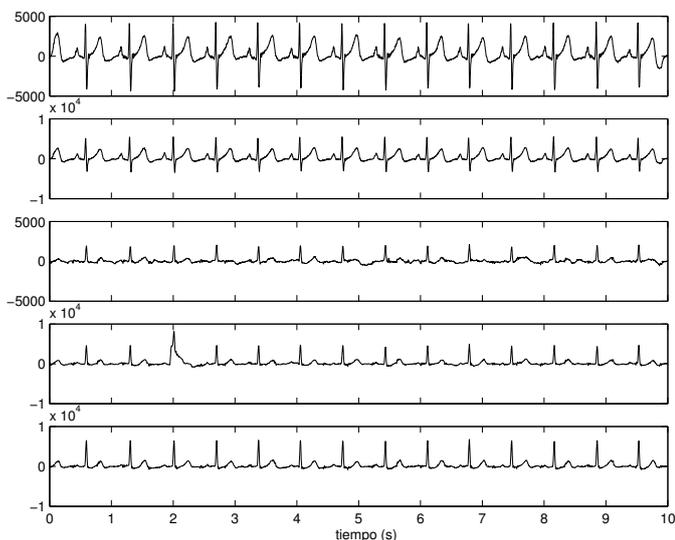


Fig. 4. Potenciales registrados sobre una mujer embarazada.

que los hace aptos para ser empleados en tiempo real sobre dispositivos de bajo coste. Las simulaciones muestran el buen desempeño de los métodos propuestos.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Junta de Andalucía a través del proyecto P07-TIC-02865.

#### REFERENCES

- [1] P. Comon and C. Jutten, Eds., *Handbook of blind source separation, independent component analysis and applications*. Elsevier, 2010.
- [2] A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja, *Independent Component Analysis*. John Wiley & Sons, 2001.

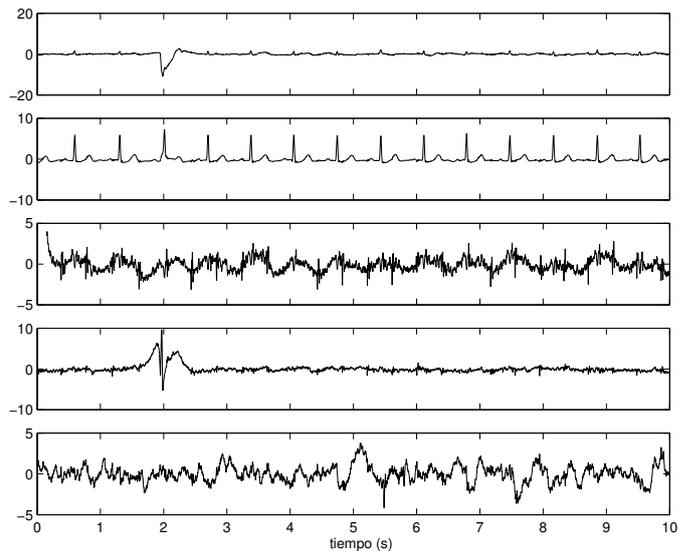


Fig. 5. Fuentes estimadas.

- [3] A. Cichocki and S.-I. Amari, *Adaptive blind signal and image processing: learning algorithms and applications*. Wiley, 2002.
- [4] V. Zarzoso and A. K. Nandi, "Noninvasive fetal electrocardiogram extraction: blind separation versus adaptive noise cancelation." *IEEE Tr. on Biomedical Engineering*, vol. 48 (1), pp. 12–18, 2001.
- [5] R. Martín-Clemente, J. Camargo-Olivares, S. Hornillo-Mellado, M. Elena, and I. Roman, "Fast technique for noninvasive fetal ecg extraction," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 58, no. 2, pp. 227 – 230, 2011.
- [6] L. De Lathauwer, B. D. De Moor, and J. Vandewalle, "Fetal electrocardiogram extraction by blind source subspace separation," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 47 (5), pp. 567–572, 2000.
- [7] J. Rieta, F. Castells, C. Sánchez, V. Zarzoso, and J. Millet, "Atrial activity extraction for atrial fibrillation analysis using blind source separation," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 51, no. 7, pp. 1176 – 1186, 2004.
- [8] R. Vetter, N. Virag, J. Vesin, P. Celka, and U. Scherrer, "Observer of autonomic cardiac outflow based on blind source separation of ecg parameters," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 47, pp. 589–593, 2000.
- [9] V. Zarzoso, *Advanced Biosignal Processing*. Springer, 2009, ch. Extraction of ECG Characteristics Using Source Separation Techniques: Exploiting Statistical Independence and Beyond.
- [10] P. Comon, "Independent component analysis, a new concept?" *Signal Processing (Special Issue Higher-Order Statistics)*, vol. 36 (3), pp. 287–314, 1994.
- [11] V. Zarzoso, R. Martín-Clemente, and S. Hornillo-Mellado, "Independent component analysis based on first-order statistics," *Signal Processing*, vol. 92, no. 8, pp. 1779–1784, 2012.
- [12] J. Camargo-Olivares, R. Martín-Clemente, S. Hornillo, M. Elena-Pérez, and I. Román-Martínez, "The maternal abdominal ecg as input to mica in the fetal ecg extraction problem." *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 18, no. 3, pp. 161 –164, 2011.